کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطهٔ کره

حسین کریمی

اشاره

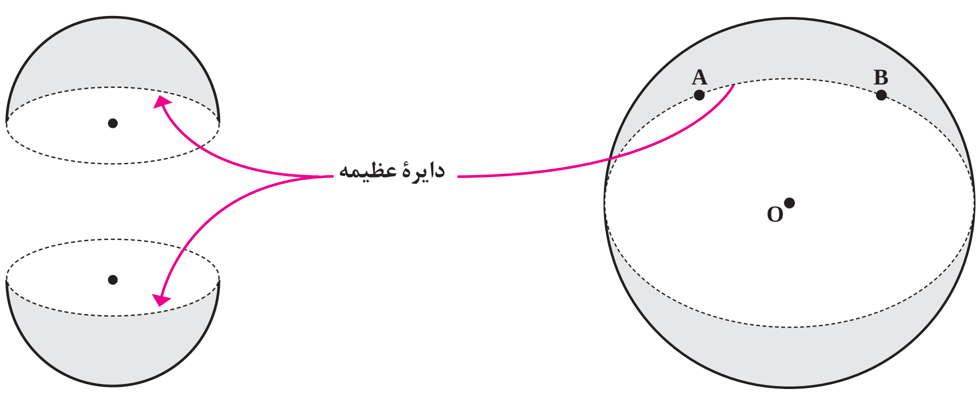
به کرهٔ جغرافیایی خیره شده بودم و مدارها توجهم را به خودشان جلب کرده بودند. «مالدیو» و «سومالی» هر دو تقریباً روی مدار صفر درجه (خط استوا) قرار داشتند و از طرف دیگر مسکو و لندن نزدیک به مداری کمی مانده به قطب واقع بودند. آیا کوتاه‌ترین مسیر، همان مسیر روی مدارهاست؟ روی کره دو سوزن ته‌گرد را در مکان‌هایی که به‌نام «ماله» (پایتخت مالدیو) و «موگادیشو» (پایتخت سومالی) مشخص شده بودند، فرو بردم و به کمک نخ آن دو سوزن را به‌هم وصل کردم. نخ را محکم کشیدم، به‌طوری‌که روی کرهٔ جغرافیایی به‌طور کامل خوابیده شود. مسیر به‌دست آمده همان خط استوا بود. همین آزمایش را بین مسکو و لندن انجام دادم.. مسیر به‌دست آمده کاملاً با مدار بین آن دو شهر متفاوت بود. دو آزمایش با نتایج متفاوت!

سؤال‌هایی برایم پیش آمد:

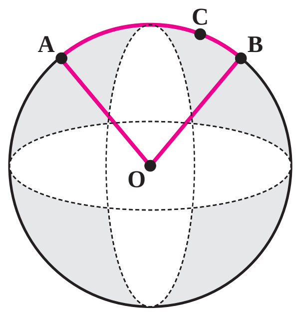
- **کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین دو نقطه از کره چه مسیری است؟**
- **هواپیماها برای پرواز بین دو شهر چه مسیری را انتخاب می‌کنند؟**
- **انتخاب آن‌ها بر چه مبنایی است؟ ...**

محصول پاسخ به آن سؤال‌ها همین مقاله شد که خدمت دوستان عرضه می‌شود.

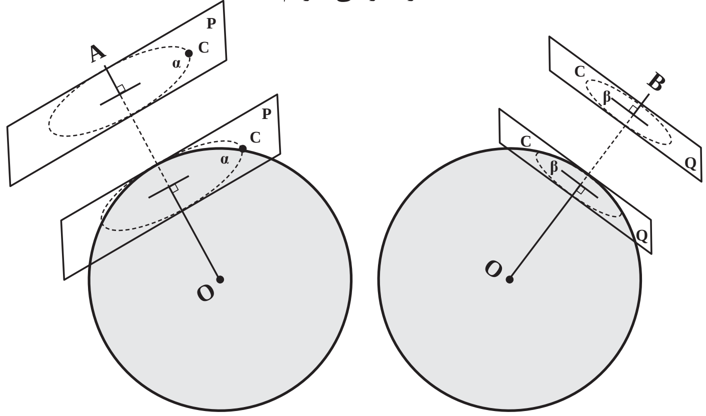
ادعا می‌کنیم کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطهٔ A و B واقع بر کره، مسیری است که روی دایرهٔ گذرا از آن دو نقطه که مرکزش همان مرکز کره است، قرار دارد. دایرهٔ مزبور را دایرهٔ عظیمه می‌نامند. در واقع دایرهٔ عظیمه دایره‌ای است که کره را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. هر کره دارای بی‌شمار دایرهٔ عظیمه است، اما فقط یکی از آن‌هاست که از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد.



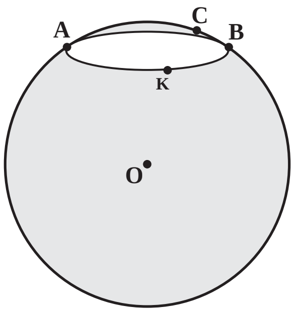
برای سهولت در تجسم، کره را چنان می‌چرخانیم که دایـرهٔ عظیمهٔ گذرا از نقاط A و B همان نمای روبه‌روی کره باشـد. برای اثبات ادعای خـود، یعنی اینکه کمان ACB جواب مسئله است (C نقطهٔ دلخواهی است برای آنکه کمان AB بهتر مشخص شود)، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:



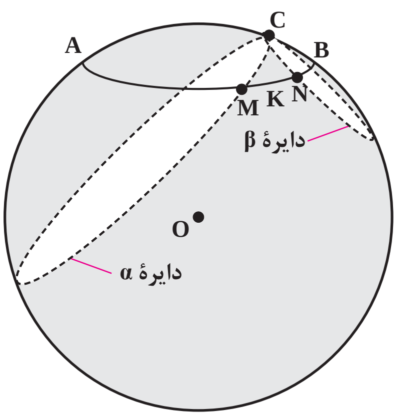
صفحـهٔ P گذرا از نقطهٔ C و عمود بر شـعاع OA، با کره دارای فصل مشـترکی اسـت کـه آن را دایرهٔ α می‌نامیـم. صفحهٔ Q گذرا از نقطهٔ C و عمود بر شـعاع OB را کـه با کره دارای فصل مشـترکی به‌نام دایرهٔ β است، در نظر می‌گیریم.



اکنـون در ادامه برای اینکه نشـان دهیم کوتاه‌ترین مسیر، کمان ACB است، از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $\overset{\frown}{ACB}$ کوتاه‌ترین مسیر نباشد و کمانی مانند AKB کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطهٔ A و B واقع بر کره باشد.



نقطهٔ تلاقی دایرهٔ α را با کمان $\overset{\frown}{AKB}$ و نقطهٔ تلاقی دایرهٔ β با همان کمان را به‌ترتیب M و N می‌نامیم.



در عرقچینـی بـه رأس A و به قاعـدهٔ α، نقاط C و M روی قاعـده قـرار دارنـد و چون $\overset{\frown}{AC}$ را از کرهٔ اصلی داشـتیم، بنابراین کوتاه‌ترین مسـیر طی شـده روی عرقچین از رأس تا قاعـده، همان کمان AC اسـت و داریم: $\overset{\frown}{AC} \le \overset{\frown}{AM}$. به‌همیـن ترتیب در مـورد عرقچینی بـه رأس B و به قاعدهٔ β داریم: $\overset{\frown}{CB} \le \overset{\frown}{NB}$.

پس به وضوح دیده می‌شود که:

$$\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB} \le \overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{NB} < \overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{MN} + \overset{\frown}{NB} = \overset{\frown}{AKB}$$

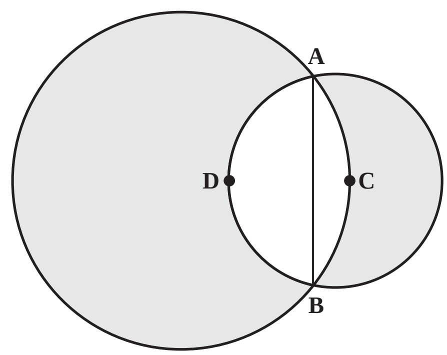
بنابرایـن فرض کوتاه بودن مسـیر $\overset{\frown}{AKB}$ منتفی است و همان کمان ACB واقع بر دایرهٔ عظیمهٔ گذرا از A و B، مسیر موردنظر است.

اما واقعیت تعیین مسیر پرواز هواپیما پیچیده‌تر از مطالب فوق است. شـاید اگر چاه‌های هوایی نبودند و اگر زمین حرکت نمی‌کرد، بسـیار راحت می‌توانستیم یک دالان کوتاه برای پرواز هواپیما از شـهر A به شهر B داشته باشـیم. دقت کنید که کرهٔ زمین در حرکت اسـت (از غرب به شـرق) و به‌همین دلیل، مدت پرواز

هواپیمـــا از تهران تا پاریس حدود ۵/۵ ســاعت و مدت زمان برگشت حدود ۶ ســاعت است. اگر هواپیما را در لحظهٔ معین در نقطهٔ C واقع بر کمان AB فرض کنیم، در لحظه‌ای دیگر، تغییر فاصله از C تا A برابر با تغییر فاصله از C تا B نخواهد بود و همین عامل سبب تغییر دایرهٔ عظیمه خواهد شــد و از این‌رو کار تعیین مســیر پرواز به راحتیِ ارائهٔ مطالب فوق نیست.

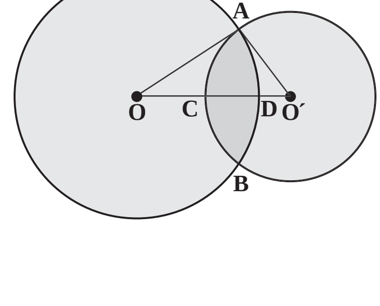
توضیح تکمیلی*

بــه طریق دیگری هــم می‌توان مســئلهٔ کوتاه‌ترین مســیر بین دو نقطه روی محیط کره را حل کرد. به‌طور شــهودی روشن است که هرگاه یک دســته دایره از دو نقطهٔ ثابت و مشترک A و B بگذرند (یعنی در وتر AB مشترک باشند)، هر چقدر دایره‌ها بزرگ‌تر شوند، کمان حاوی وتر، کوچک‌تر می‌شــود و طــول آن به طول وتر AB نزدیک‌تر می‌شــود. برای مثال در شکل زیر، کمان ACB از کمان ADB کوچک‌تر است (طول آن به طول وتر AB نزدیک‌تر اســت) و اگر شعاع دایره بزرگ‌تر هم بشــود، طول کمان فوق کوچک‌تر می‌شود و این موضوع را به‌صورت دقیق‌تر اثبات می‌کنیم:



دایره‌های C(O,R) و C´(O´,R´) را مطابق شــکل زیــر در نظر می‌گیریــم. با فــرض R>R´ (OA>O´A) می‌خواهیم نشان دهیم:

$\overset{\frown}{ADB} < \overset{\frown}{ACB}$



اما می‌دانیم که اندازهٔ هر کمان در دایره برابر اســت با حاصل‌ضرب شعاع دایره در اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به دایره (برحســب رادیــان). یعنی باید نشــان دهیم:

$۲OA.\hat{O} < ۲O'A.\hat{O}'$ و یا: $OA.\hat{O} < O'A.\hat{O}'$

با توجه به قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث AOO´ داریم:

$OA = ۲r.\sin\hat{O}'$ و $O'A = ۲r\sin\hat{O}$

(r شعاع دایرهٔ محیطی مثلث AOO´ است)

بنابراین باید ثابت کنیم:

$$۲r\sin\hat{O}'.\hat{O} < ۲r\sin\hat{O}.\hat{O}'$$

$$\Rightarrow \hat{O}.\sin\hat{O}' < \hat{O}'.\sin\hat{O} \Rightarrow \frac{\hat{O}}{\sin O} < \frac{\hat{O}'}{\sin\hat{O}'}$$

امــا بــا توجــه بــه اینکــه OA>O´A داریــم: $\hat{O} > \hat{O}'$. پــس با فــرض $\hat{O}' > \hat{O}$ باید نشــان دهیم: $\frac{\hat{O}}{\sin\hat{O}} > \frac{\hat{O}'}{\sin\hat{O}'}$ و ایــن یعنــی تابع $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ تابعــی صعــودی اســت. ایــن موضــوع بــا توجــه به علامــت مشــتق تابــع (بــا فــرض $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$) به‌راحتی قابل اثبات است:

$$f'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^۲ x} = \frac{\cos x(\tan x - x)}{\sin^۲ x} > ۰$$

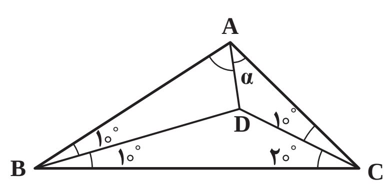
زیرا می‌دانیم: tanx>x. (چرا؟) حالا با توجه به این موضوع، اثبات قضیهٔ اصلی آســان می‌شــود. اگر A و B دو نقطــهٔ ثابت روی محیط کره باشــند، از بین دســته دوایری که از A و B می‌گذرند، کوتاه‌ترین آن‌ها مربوط به بزرگ‌تریــن دایره روی محیط کره اســت که همان دایرهٔ عظیمهٔ کره است.

*پی‌نوشت‌ها

*تــوضــیح تــکمیلی از هوشنگ شرقی است.

پرسش‌های بیکارجو!

در شکل زیر اندازهٔ α چند درجه است؟



الف) ۳۰° ☐ ب) ۲۰° ☐

ج) ۲۵° ☐ د) ۱۵° ☐

هـ) ۳۵° ☐